BAB III

MODEL TRANSPORTASI

3.1 Pendahuluan

Permasalahan transportasi berkaitan dengan pendistribusian beberapa komoditas dari beberapa pusat penyediaan, yang disebut dengan sumber menuju ke beberapa pusat penerima yang disebut tujuan, dengan maksud untuk memperkecil total biaya distribusi (Hillier dan Lieberman, 2001, hlm. 354). Pengertian lain menurut Anwar dan Nasandi (dalam Barani, 2002, hlm. 35) mengatakan bahwa model transportasi (*transportation models*) merupakan salah satu bentuk khusus atau variasi dari *linier programming* yang dikembangkan khusus untuk memecahkan masalah-masalah yang berhubungan dengan transportasi (pengangkutan) dan distribusi produk atau sumber daya dari berbagai sumber (pusat pengadaan atau titik suplai) ke berbagai tujuan (titik permintaan).

Sementara itu, Taha (1996, hlm. 202) menyatakan bahwa model transportasi pada dasarnya merupakan sebuah program linier yang dapat dipecahkan dengan metode simpleks biasa. Tetapi strukturnya yang khusus memungkinkan pengembangan sebuah prosedur pemecahan yang disebut teknik transportasi yang lebih efisien dalam perhitungan. Model ini berkaitan dengan penentuan rencana berbiaya terendah untuk mengirimkan satu barang dari sejumlah sumber ke sejumlah tujuan. Model ini dapat diperluas secara langsung untuk mencakup situasi-situasi praktis dalam bidang pengendalian mutu, penjadwalan dan penugasan tenaga kerja, diantara bidang-bidang lainnya.

Menurut Taha, dalam arti sederhana, model transportasi berusaha menentukan sebuah rencana transportasi sebuah barang dari sejumlah sumber ke sebuah tujuan. Data dalam model ini mencakup :

1. Tingkat penawaran di setiap sumber dan jumlah permintaan di setiap tujuan.
2. Biaya transportasi per unit barang dari setiap sumber ke setiap tujuan.

Tujuan dari model transportasi adalah menentukan jumlah yang harus dikirimkan dari setiap sumber ke setiap tujuan sedemikian rupa sehingga biaya transportasi total diminimumkan. Sebuah tujuan dapat menerima permintaannya dari satu sumber atau lebih. (Taha, 1996, hlm. 203).

Adapun menurut Pangestu Subagyo (dalam Zainuddin, 2011, hlm. 13), “Metode Transportasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengatur distribusi dari sember-sumber yang menyediakan produk yang sama, ke tempat-tempat yang membutuhkan secara optimal”. Alokasi produk ini harus diatur sedemikian rupa, karena terdapat perbedaan biaya-biaya alokasi dari satu sumber ke tempat-tempat tujuan berbeda-beda, dan dari beberapa sumber ke suatu tempat tujuan juga berbeda-beda.

Selain itu, menurut Sri Mulyono (dalam Zainuddin, 2011, hlm. 14), “Pada umumnya, masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu produk tunggal dari beberapa sumber, dengan penawaran terbatas, menuju beberapa tujuan, dengan permintaan tertentu, pada transpor biaya minimum." Karena hanya ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber.

Sedangkan menurut Heizer (dalam Zainuddin, 2011, hlm. 14), "Pemodelan transportasi adalah suatu prosedur berulang untuk memecahkan permasalahan minimasi biaya pengiriman produk dari beberapa sumber ke beberapa tujuan." Untuk menggunakan model transportasi, kita harus mengetahui hal-hal berikut :

1. Titik asal dan kapasitas atau pasokan pada setiap periode.
2. Titik tujuan dan permintaan pada setiap periode.
3. Biaya pengiriman satu unit dari setiap titik asal ke setiap titik tujuan.

Adapun menurut Sarjono (dalam Zainuddin, 2011, hlm. 14), "Metode transportasi merupakan salah satu teknik manajemen dalam mendistribusikan produk dari gudang ke tempat yang dituju.". Metode transportasi sangat dibutuhkan oleh perusahaan yang melakukan kegiatan pengiriman barang dalam usahanya. Dengan adanya metode transportasi, perusahaan akan lebih efektif dan efisien dalam kegiatan pendistribusian produknya.

Menurut Dimyati dan Dimyati (1996, hlm. 129) model transportasi memiliki ciri-ciri khusus sebagai berikut :

1. Terdapat serjumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu.
2. Kuantitas komoditas atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh tujuan, besarnya tertentu.

3. Komoditas yang dikirim atau diangkut dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber.
4. Ongkos pengangkutan komoditas dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya tertentu.

Karena hanya terdapat satu barang, sebuah tujuan dapat menerima permintaannya dari satu sumber atau lebih. Tujuan dari model ini adalah menentukan jumlah yang harus dikirimkan dari setiap sumber ke setiap tujuan sedemikian rupa sehingga biaya transportasi total diminimumkan.

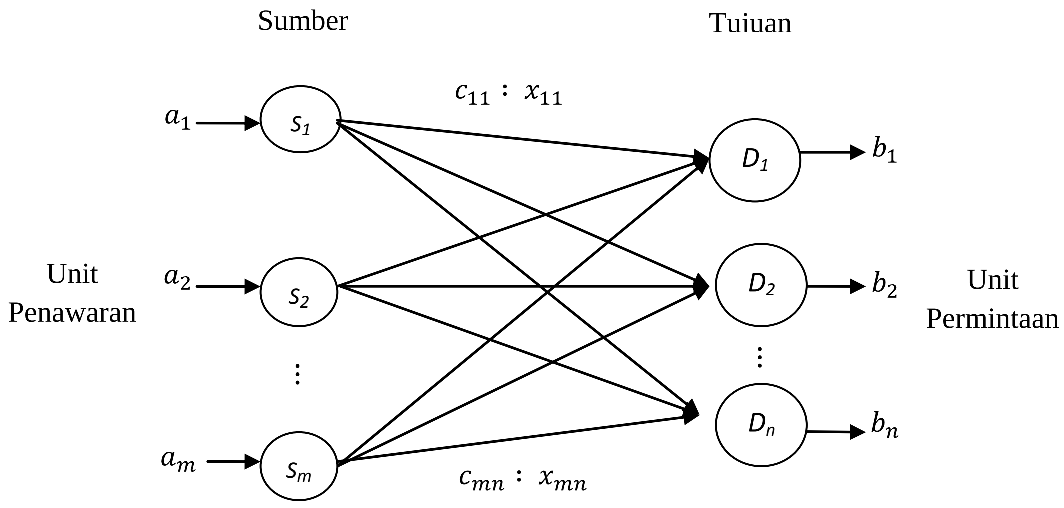
Asumsi dasar dari model ini adalah bahwa biaya transportasi di sebuah rute tertentu adalah proporsional secara langsung dengan jumlah unit yang dikirimkan. Definisi “unit transportasi” akan bervariasi bergantung pada jenis “barang” yang dikirimkan. Misalnya, kita dapat membicarakan unit transportasi sebagai setiap balok baja yang diperlukan untuk membangun jembatan. Atau kita dapat menggunakan beban truk dari sebuah barang sebagai unit transportasi. Bagaimanapun juga, unit penawaran dan permintaan harus konsisten dengan definisi kita tentang “unit yang dikirimkan”. (Taha, 1996, hlm. 203).

3.2 Model Transportasi

Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya bahwa model transportasi merupakan bentuk khusus dari *linier programming* (LP). Model ini secara khusus membahas masalah pendistribusian suatu komoditas atau produk dari sejumlah sumber (*supply*) kepada sejumlah tujuan (*destination, demand*) dengan tujuan meminimumkan ongkos pengangkutan yang terjadi (Dimyati dan Dimyati, 2006, hlm. 128) .

Gambar di bawah (Gambar 3.1) memperlihatkan sebuah model transportasi dari sebuah jaringan dengan ***m*** sumber dan ***n*** tujuan. Sebuah ***sumber*** atau ***tujuan*** diwakili dengan sebuah **node**. **Busur** yang menghubungkan sebuah sumber dan sebuah tujuan mewakili rute pengiriman barang tersebut. Jumlah penawaran di sumber i adalah a_i dan permintaan di tujuan j adalah b_j. Biaya unit transportasi antara sumber i dan tujuan j adalah c_{ij}.

Anggaplah x_{ij} mewakili jumlah barang yang dikirimkan dari sumber i ke tujuan j ; maka model LP yang mewakili masalah transportasi ini diketahui secara umum sebagai



Gambar 3.1 : Model trasnsportasi

Berikut model umum dari model transportsi

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

dengan batasan

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$x_{ij} \geq 0$ untuk semua *i* dan *j*.

Kelompok batasan pertama menetapkan bahwa jumlah pengiriman dari sebuah sumber tidak dapat melebihi penawarannya ; demikian pula, kelompok batasan kedua mengharuskan bahwa jumlah pengiriman ke sebuah tujuan harus memenuhi permintaannya.

Model yang baru digambarkan di atas menyiratkan bahwa penawaran total $\sum_{i=1}^{m} a_i$ harus setidaknya sama dengan permintaan total $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Ketika penawaran total sama dengan permintaan total ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$), formulasi yang dihasilkan disebut **model transportasi berimbang** (balanced transportation model). Model ini berbeda dengan model di atas hanya dalam fakta bahwa semua batasan adalah persamaan ; yaitu,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Dalam kehidupan nyata, tidak selalu dapat dipastikan bahwa penawaran sama dengan permintaan atau melebihinya. Tetapi, sebuah model transportasi dapat selalu berimbang. Pengimbangan ini, di samping kegunaannya dalam pemodelan situasi praktis tertentu, adalah penting untuk pengembangan sebuah metode pemecahan yang sepenuhnya memanfaatkan struktur khusus dari model transportasi ini. (Taha, 1996, hlm. 203-204)

3.3 Keseimbangan Model Transportasi

Suatu model transportasi dikatakan seimbang apabila *total supply* (sumber) sama dengan *total demand* (tujuan). Dengan kata lain :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Dalam persoalan sebenarnya, batasan ini tidak terlalu terpenuhi; atau dengan kata lain, jumlah *supply* yang tersedia mungkin lebih besar atau lebih kecil daripada jumlah yang diminta. Jika hal ini terjadi, maka model persoalannya disebut sebagai model yang tidak seimbang (*unbalanced*). Batasan di atas dikemukankan hanya karena ia menjadi dasar dalam pengembangan teknik transportasi. Namun, setiap persoalan transportasi dapat dibuat seimbang dengan cara memasukkan variabel artifisial (semu). Jika jumlah *demand* melebihi jumlah *supply***,** maka dibuat suatu sumber *dummy* yang akan men-*supply* kekurangan tersebut, yaitu sebanyak $\sum_j b_j - \sum_i a_i$.

Sebaliknya, jika jumlah *supply* melebihi jumlah *demand*, maka dibuat suatu tujuan *dummy* untuk menyerap kelebihan tersebut, yaitu sebanyak $\sum_i a_i - \sum_j b_j$. Ongkos transportasi per unit (c_{ij}) dari sumber *dummy* ke seluruh tujuan adalah nol. Hal ini dapat dipahami karena pada kenyataannya dari sumber *dummy* tidak terjadi pengiriman. Begitu pula dengan ongkos transportasi per unit (c_{ij}) dari semua sumber ke tujuan *dummy* adalah nol.

Jika pada suatu persoalan transportasi dinyatakan bahwa dari sumber ke k tidak dilakukan atau tidak boleh terjadi pengiriman ke tujuan ke l, maka nyatakanlah (c_{kl}) dengan suatu harga M yang besarnya tidak terhingga (yaitu teknik M pada metode simpleks). Hal ini dilakukan agar dari k ke l itu benar-benar tidak terjadi pendistribusian komoditas. (Dimyati dan Dimyati, 2006, hlm.132)

3.4 Algoritma Transportasi

Menurut Siswanto dalam Sarjono (dalam Zainuddin, 2011, hlm. 15), “Model transportasi pada saat dikenali pertama kali, diselesaikan secara manual dengan menggunakan algoritma yang dikenal sebagai algoritma transportasi. Langkah-langkah pengerjaannya adalah sebagai berikut :

1. Mendiagnosis masalah dimulai dengan pengenalan sumber, tujuan, parameter dan variabel.
2. Seluruh informasi tersebut kemudian dituangkan ke dalam matriks transportasi.

   Dalam hal ini,

a. Bila kapasitas seluruh sumber lebih besar dari permintaan seluruh tujuan maka sebuah kolom (dummy) perlu ditambahkan untuk menampung kelebihan kapasitas itu.

b. Bila kapasitas seluruh sumber lebih kecil dari sebuah permintaan tujuan maka sebuah baris perlu ditambahkan untuk menyediakan kapasitas semu yang akan memenuhi kelebihan permintaan itu. Jelas sekali bahwa kelebihan permintaan itu tidak bisa dipenuhi.

3. Setelah matriks tranportasi terbentuk kemudian dimulai menyusun tabel awal. Algoritma transportasi mengenal tiga macam metode untuk menyusun tabel awal, yaitu :

   a. Metode biaya terkecil atau Least Cost Method (LCM)

   b. Metode sudut barat laut atau North West Corner Method (NWCM)

   c. Metode Aproksimasi Vogel atau Vogel’s Approximation Method (VAM)

   Ketiga metode di atas masing-masing berfungsi untuk menentukan alokasi distribusi awal yang akan membuat seluruh kapasitas sumber teralokasi ke seluruh tujuan.

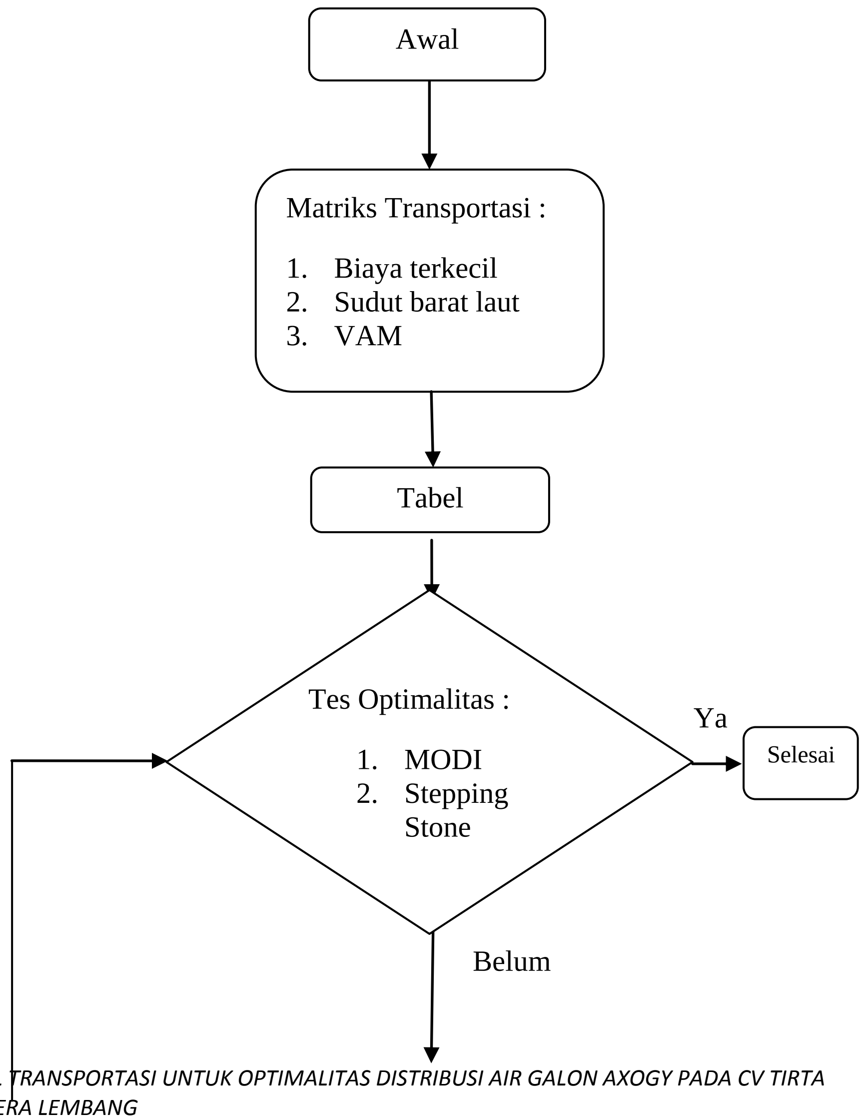
4. Setelah penyusunan tabel awal selesai, maka sebagai langkah selanjutnya adalah pengujian optimalitas tabel untuk mengetahui apakah biaya distribusi total telah minimum. Secara, matematis, pengujian ini dilakukan untuk menjamin bahwa nilai fungsi tujuan minimum (atau maksimum) telah tercapai. Ada dua macam pengujian optimalitas algoritma transportasi :

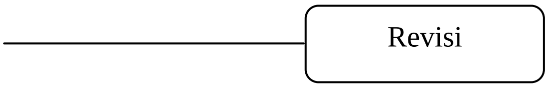
   a. Stepping Stone Method.

b. *Modified Distribution (MODI) Method.*

5. Langkah yang terakhir adalah revisi tabel bila dalam langkah keempat terbukti bahwa tabel belum optimal atau biaya distribusi total masih mungkin diturunkan lagi. Dengan demikian, jelas sekali bahwa langkah kelima ini tidak akan dilakukan apabila pada langkah keempat telah membuktikan bahwa tabel telah optimal.

Berikut skema sederhana terkait langkah pengerjaan Model Transportasi :





Gambar 3.2 : Langkah pengerjaan model transportasi

3.5 Teknik Transportasi

Langkah-langkah dasar dari teknik transportasi adalah :

Langkah 1 : Tentukan pemecahan awal yang fisibel (layak).

Langkah 2 : Tentukan variabel masuk dari di antara variabel nondasar. Jika semua variabel masuk memenuhi kondisi optimalitas (dari metode simpleks), maka berhenti; jika tidak, lanjutkan ke langkah 3.

Langkah 3 : Tentukan variabel keluar (dengan menggunakan kondisi kelayakan) dari di antara variabel-variabel dalam pemecahan dasar saat ini, lalu temukan pemecahan dasar baru. Kembali ke langkah 2. (Taha, 1996, hlm.212)

3.5.1 Menentukan Pemecahan Awal yang Fisibel.

a. Metode Sudut Barat Laut (North West Corner Method).

Pengalokasian awal ditempatkan pada sel pojok kiri atas (north west corner). Jumlah yang dialokasiakan adalah jumlah yang paling memungkinkan terbatas pada batasan suplai dan permintaan untuk sel tersebut.

Langkah-langkah :

1. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel di pojok kiri atas, disesuaikan dengan batasan suplai dan permintaan.

2. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel fisibel berikutnya yang berdekatan.
3. Ulangi langkah (2) sampai semua kebutuhan telah terpenuhi.

Contoh 1 :

min $Z = 6x_{11} + 8x_{12} + 10x_{13} + 7x_{21} + 11x_{22} + 11x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 12x_{33}$

Kendala

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 150$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 175$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 275$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 300$$

dan $x_{ij} \geq 0$

Solusi Model Transportasi

Tabel 3.1. Tabel transportasi

	1	***2***	***3***	***Supply***
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175

3	4	5	12	275
Demand	200	100	300	600

Tabel 3.2. Solusi northwest corner awal

	1	***2***	***3***	***Supply***
1	6 150	8	10	150
2	7 50	11 100	11 25	175
3	4	5	12 275	275
Demand	200	100	300	600

Solusi Awal :

$x_{11} = 150$ $x_{22} = 100$ $x_{33} = 275$

$x_{21} = 50 \qquad x_{23} = 25$

dengan

$$Z = 6(150) + 8(0) + 10(0) + 7(50) + 11(100) + 11(25) + 4(0) + 5(0) + 12(275)$$

$$= \$5925$$

b. Metode Biaya Terkecil (Least Cost Method).

Dasar Pemikiran dari metode ini adalah mengalokasikan ke sel-sel dengan biaya terendah. Alokasi awal dilakukan pada sel dalam tabel yang mempunya biaya terendah.

Langkah-langkah :

1. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel fisibel dengan biaya transportasi minimum, disesuaikan dengan batasan suplai dan permintaan.
2. Ulangi langkah (1) sampai semua kebutuhan terpenuhi.

Tabel 3.3. Alokasi biaya minimum awal

	1	***2***	***3***	***Supply***
1	6 xxx	8	10	150
2	7 xxx	11	11	175
3	4	5	12	275

	200			
Demand	200	100	300	600

Tabel 3.4. Alokasi biaya minimum kedua

	1	*2*	*3*	***Supply***
1	6 xxx	8	10	150
2	7 xxx	11	11	175
3	4 200	5 75	12 xxx	275
Demand	200	100	300	600

Tabel 3.5. Solusi awal

	1	*2*	*3*	***Supply***
1	6 xxx	8 25	10 125	150
2	7 xxx	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12 Xxx	275
Demand	200	100	300	600

Solusi awal :

$$x_{12} = 25 \qquad x_{13} = 125$$

$$x_{23} = 175$$

$$x_{31} = 200 \qquad x_{32} = 75$$

dengan

$$Z = 6(0) + 8(25) + 10(125) + 7(0) + 11(0) + 11(175) + 4(200) + 5(75) + 12(0)$$

$$= \$4550$$

c. Metode Aproximasi Vogel (Vogel's Approximation Method)

Metode Aproksimasi Vogel (VAM) berdasarkan pada konsep biaya penalti. Jika pengambil keputusan salah memilih tindakan dari beberapa alternatif tindakan yang ada, maka suatu sanksi diberikan. Dalam hal ini, yang dimaksud sebagai rangkaian tindakan adalah alternatif rute dan suatu keputusan dianggap salah jika mengalokasikan ke sel yang tidak berisi biaya terendah.

Langkah-langkah :

1. Tentukan biaya penalti untuk tiap baris dan kolom dengan cara mengurangkan biaya sel terendah berikutnya pada baris atau kolom yang sama.
2. Pilih baris atau kolom dengan biaya penalty tertinggi.
3. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel fisibel dengan biaya transportasi terendah pada baris atau kolom dengan biaya penalti.
4. Ulangi langkah (1), (2) dan (3) sampai semua kebutuhan telah terpenuhi.

Tabel 3.6. Biaya penalti VAM

	1	*2*	*3*	*Supply*	
1	6	8	10	150	2
2	7	11	11	175	4
3	4	5	12	275	1
Demand	200	100	300	600	
	2	3	1		

Tabel 3.7. Alokasi VAM awal

	1	*2*	*3*	*Supply*	
1	6	8	10	150	2
2	7 175	11 xxx	11 Xxx	175	
3	4	5	12	275	1
Demand	200	100	300	600	

	1	2	3	
	2	3	2	

Tabel 3.8. Alokasi VAM kedua

	1	*2*	*3*	***Supply***	
1	6	8 xxx	10	150	4
2	7 175	11 xxx	11 Xxx	175	
3	4	5 100	12	275	8
Demand	200	100	300	600	
	2		2		

Tabel 3.9. Alokasi VAM ketiga

	1	*2*	*3*	***Supply***
1	6 xxx	8 xxx	10	150
2	7 175	11 xxx	11 xxx	175
3	4 25	5 100	12	275

Demand	200	100	300	600

2

Tabel 3.10. Solusi VAM awal

	1	*2*	*3*	*Supply*
1	6 xxx	8 xxx	10 150	150
2	7 175	11 xxx	11 xxx	175
3	4 25	5 100	12 150	275
Demand	200	100	300	600

Solusi awal :

$$x_{13} = 150 \qquad x_{21} = 175$$

$$x_{31} = 25 \qquad x_{32} = 100 \qquad x_{33} = 150$$

dengan

$$Z = 6(0) + 8(0) + 10(150) + 7(175) + 11(0) + 11(0) + 4(25)$$
$$+ 5(100) + 12(150)$$
$$= \$5125$$

Jadi, solusi biaya sel minimum ($4550) < solusi awal VAM ($5125) < Solusi awal Northwst corner ($5925).

3.5.2 Pengujian Optimalitas.

Setelah solusi fisibel basis diperoleh dengan sah satu dari ketiga metode penentuan solusi awal (Northwest corner, metode sel biaya minimum, dan metode aproksimasi Vogel), langkah selanjutnya adalah menyelesaikan model untuk mendapatkan solusi optimalitas (total biaya minimum).

a. Metode Batu Loncatan (Stepping Stone Method)

Prinsip solusi basis dalam permsalahan transportasi adalah untuk menentukan apakah suatu rute transportasi yang tidak digunakan (yaitu sebagai sel kosong) akan menghasilkan total biaya yang lebih rendah jika digunakan.

Karakteristik umum dari proses *stepping-stone :*

1. Selalu mulai dari sel yang kosong dan membentuk suatu lintasan tertutup dari sel-sel yang telah dialokasikan.
2. Dalam pembentukan lintasan tertutup ini, sel yang digunakan dan belum digunakan mungkin terlewat.
3. Dalam baris atau kolom yang mana saja pasti terdapat tepat satu penambahan dan satu pengurangan.

Langkah-langkah pada Metode *Stepping-Stone :*

1. Tentukan lintasan stepping-stone dan perubahan biaya untuk tiap sel yang kosong dalam tabel.

2. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel kosong yang menghasilkan penurunan biaya terbesar.
3. Ulangi langkah (1) dan (2) sampai semua sel kosong memiliki perubahan biaya positif yang mengidentifikasikan tercapainya solusi optimal.

Untuk contoh di atas, solusi awal yang digunakan adalah solusi awal yang didapat dengan metode biaya sel minimum, yaitu :

Tabel 3.11. Solusi biaya sel minimum

	1	***2***	***3***	***Supply***
1	6	8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Demand	200	100	300	600

Sel-sel kosong adalah sel 11, sel 21, sel 22 dan sel 33.

Lintasan *stepping-stone*

11→12→32→31

21→23→13→12→32→31

22→23→13→12

33→13→12→32

Perubahan biaya ($)

6 – 8 + 5 – 4 = -1

7 – 11 +10 – 8 + 5 – 4 = -1

11 – 11 + 10 – 2 = +2 **12 – 10 + 8 – 5 = +5**

Tebel 3.12. Iterasi kedua dari metode stepping-stone

	1	***2***	***3***	***Supply***
1	6 25	8	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 175	5 100	12	275
Demand	200	100	300	600

Sel-sel kosong adalah sel 11, sel 21, sel 22 dan sel 33.

Lintasan *stepping-stone* **33→31→11→13**

12→32→31→11 **Perubahan biaya ($)**

21→23→13→11 **8 - 5 + 4 – 6 = +1**

22→32→31→11→13→23 **7 – 11 +10 – 6 = 0**

11 – 5 + 4 – 6 + 10 -11 = +3 **12 – 4 + 6 – 10 = +4**

Evaluasi dari keempat lintasan dalam tabel 3.12. tidak mengidentifikasikan adanya penurunan biaya. Jadi, solusi optimalnya :

$x_{11} = 25$ $x_{23} = 175$ $x_{31} = 175$

$x_{13} = 125$ $x_{32} = 100$

dengan

$$Z = 6(25) + 8(0) + 10(125) + 7(0) + 11(0) + 11(175) + 4(175) + 5(100) + 12(0)$$

$$= \$4525$$

<u>Keterangan :</u>

Lintasan untuk sel 21 menghasilkan perubahan biaya sebesar $0. Dengan kata lain, pengalokasian ke sel 21 tidak mengakibatkan peningkatan atau penurunan total biaya. Situasi ini mengindikasikan adanya *solusi optimal majemuk*. Jadi, sel 21 dapat dimasukkan ke dalam solusi dan tidak akan mengakibatkan perubahan pada total biaya minimum $4525. Solusi alternative ditunjukkan pada Tabel 3.13.

Tabel 3.13. Solusi optimal alternatif

	1	***2***	***3***	***Supply***
1	6	8	10 150	150
2	7 25	11	11 150	175

3	4 175	5 100	12	275
Demand	200	100	300	600

$x_{13} = 150$ $\quad x_{23} = 150$ $\quad x_{31} = 175$

$x_{21} = 25$ $\quad x_{32} = 100$

dengan

$$Z = 6(0) + 8(0) + 10(150) + 7(25) + 11(0) + 11(150) + 4(175) + 5(100) + 12(0)$$

$$= \$4525$$

b. Metode Distribusi yang Dimodifikasi (Modified Distribution Method)

Modified Distibution (MODI) pada dasarnya adalah suatu modifikasi dari metode stepping-stone. Dalam MODI perubahaan biaya pada sel ditentukan secara metematis tanpa mengidentifikasi lintasan sel-sel kosong seperti pada metode *stepping-stone*.

Langkah-langkah MODI :

1. Tentukan solusi awal menggunakan salah satu dari ketiga metode tersedia.
2. Hitung nilai-nilai $u_i + v_j$ untuk tiap baris dan kolom dengan menerapkan rumus :

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Pada tiap sel yang memiliki alokasi.

3. Hitung perubahan biaya, k_{ij} untuk setiap sel kosong dengan rumus :

$$c_{ij} - u_i - v_j = k_{ij}$$

4. Alokasikan sebanyak mungkin ke sel kosong yang menghasilkan penurunan biaya bersih terbesar (k_{ij} negatif dengan nilai mutlak terbesar). Alokasikan sesuai dengan lintasan stepping-stone untuk sel terpilih.
5. Ulangi langkah (2) – (4) sampai semua nilai k_{ij} nonnegatif (positif atau nol).

Berdasarkan dari metode biaya sel minimum, tabel dari solusi awal dengan modifikasi yang diperlukan untuk MODI ditunjukkan dalam Tabel 3. 14.

Tabel 3.14. Solusi awal biaya minimum

	v_j	v_1 =	v_2 =	v_3 =	
u_i		***1***	***2***	***3***	***Supply***
	1	6	8	10	150

***u**$_1$* =			25	125	
***u**$_2$* =	***2***	7	11	11 175	175
***u**$_3$* =	***3***	4 200	5 75	12	275
	Demand	200	100	300	600

Menghitung nilai u_i dan v_j, dengan rumus $u_i + v_j = c_{ij}$:

$$x_{12} : u_1 + v_2 = 8$$

$$x_{13} : u_1 + v_3 = 10$$

$$x_{23} : u_2 + v_3 = 11$$

$$x_{31} : u_3 + v_1 = 4$$

$$x_{32} : u_3 + v_2 = 5$$

Untuk memecahkan system persamaan ini, diasumsikan $u_1 = 0$.

$$x_{12} : u_1 + v_2 = 8 \iff 0 + v_2 = 8 \iff v_2 = 8$$

$$x_{13} : u_1 + v_3 = 10 \iff 0 + v_3 = 10 \iff v_3 = 10$$

$$x_{23} : u_2 + v_3 = 11 \iff u_2 + 10 = 11 \iff u_2 = 1$$

$$x_{32} : u_3 + v_2 = 5 \iff u_3 + 8 = 5 \iff u_3 = -3$$

$$x_{31} : u_3 + v_1 = 4 \iff -3 + v_1 = 4 \iff v_1 = 7$$

Tabel 3.15. menunjukkan solusi awal dengan semua nilai u_i dan v_j.

Tabel 3.15. Solusi awal dengan nilai u_i dan v_j.

	v_j	v_1 =7	v_2 =8	v_3 =10	

u_i		1	2	3	Supply
$u_1 = 0$	1	6	8 25	10 125	150
$u_2 = 1$	2	7	11	11 175	175
$u_3 = 3$	3	4 200	5 75	12	275
	Demand	200	100	300	600

Menghitung perubahan biaya untuk tiap sel kosong dengan rumus

$$c_{ij} - u_i - v_j = k_{ij}.$$

$$x_{11} : k_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 6 - 0 - 7 = -1$$

$$x_{21} : k_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 7 - 1 - 7 = -1$$

$$x_{22} : k_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 11 - 1 - 8 = +2$$

$$x_{33} : k_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 12 - (-3) - 10 = +5$$

Sel 11 dan sel 21 mengindikasikan adanya penurunan biaya sebesar $1 per unit lokasi. Dengan memilih sel 11 untuk pengalokasian, maka tabel 3.16. menyajikan pengulangan kedua MODI.

Tabel 3,16. Pengulangan kedua MODI

	v_j	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	
u_i		1	2	3	Supply
$u_1 =$	1	6 25	8	10 125	150
$u_2 =$	2	7	11	11 175	175
$u_3 =$	3	4 175	5 100	12	275
	Demand	200	100	300	600

Nilai-nilai u_i dan v_j pada tabel 3.16 harus dihitung kembali (diasumsikan $u_1 = 0$)

$$x_{11} : u_1 + v_1 = 6 \Leftrightarrow 0 + v_1 = 6 \Leftrightarrow v_1 = 6$$

$$x_{13} : u_1 + v_3 = 10 \Leftrightarrow 0 + v_3 = 10 \Leftrightarrow v_3 = 10$$

$$x_{23} : u_2 + v_3 = 11 \Leftrightarrow u_2 + 10 = 11 \Leftrightarrow u_2 = 1$$

$$x_{31} : u_3 + v_1 = 4 \Leftrightarrow u_3 + 6 = 4 \Leftrightarrow u_3 = -2$$

$$x_{32} : u_3 + v_2 = 5 \Leftrightarrow -2 + v_2 = 5 \Leftrightarrow v_2 = 7$$

Tabel 3.17. Nilai u_i dan $v_j$yang baru untuk pengulangan kedua

	v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 10$	
u_i		1	2	3	Supply

***u₁* =0**	***1***	6 25	8	10 125	150
***u₂* =1**	***2***	7	11	11 175	175
***u₃* =-2**	***3***	4 175	5 100	12	275
	Demand	200	100	300	600

Menghitung perubahan biaya untuk tiap sel kosong dengan rumus

$$c_{ij} - u_i - v_j = k_{ij}.$$

$$x_{12} : k_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 0 - 7 = +1$$

$$x_{21} : k_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 7 - 1 - 6 = 0$$

$$x_{22} : k_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 11 - 1 - 7 = +3$$

$$x_{33} : k_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 12 - (-2) - 10 = +4$$

Karena semua k_{ij} sudah bernilai nonnegatif (positif atau nol), maka solusi yang ditunjukkan pada Tabel 3.17. adalah **optimal**. (Afghany, 2011)